

文章编号: 1000-7598 (2010) 11-3667-05

# 基于下限定理的路面结构安定分析

孙 阳<sup>1,2</sup>, 沈水龙<sup>1,2</sup>, 罗春泳<sup>1,2</sup>

(1. 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院土木工程系, 上海 200240; 2. 上海交通大学 国家海洋工程重点实验室, 上海 200240)

**摘 要:** 传统的以弹性理论和经验方法为基础的路面结构设计方法, 对路面结构的安全性评价存在着不合理性。安定理论可为复杂荷载作用下的路面结构承载力分析提供理论依据, 基于该定理发展了一种应用于路面结构的安定分析方法, 并应用于 2 层路面结构的安定分析, 计算给出了荷载作用方式、路面结构形式、材料性质变化对路面安定极限影响的定量分析结果, 通过对比表明了安定分析应用于路面结构的可行性。安定极限可为路面结构的分析与设计提供一定的参考价值。

**关 键 词:** 路面结构; 安定理论; 下限定理; Mohr-Coulomb 等面积圆屈服准则

中图分类号: U 416

文献标识码: A

## Shakedown analysis of pavement structures based on lower bound theorem

SUN Yang<sup>1,2</sup>, SHEN Shui-long<sup>1,2</sup>, LUO Chun-yong<sup>1,2</sup>

(1. Department of Civil Engineering, School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China;

2. State Key Laboratory of Ocean Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** Present design method based on the elastic theory and experience is unreasonable while used to evaluate the safety of pavement structure. Shakedown theory can provide theoretical basis for bearing capacity analysis of pavements under complex loading. Based on the lower bound theorem of shakedown, a method for shakedown analysis of pavements has been presented. By applying the shakedown analysis of pavement, influence of load distribution, structural configuration, material properties of pavements on shakedown bearing limit are obtained. The analytical results show that the proposed method is valid for analyzing the pavement structure. Therefore, shakedown theorem can provide a useful tool for analysis and design of pavements.

**Key words:** pavement structure; shakedown theorem; lower bound theorem; Mohr-Coulomb equivalent area circle yield criterion

## 1 引 言

路面结构受到不同级位和数量的车辆荷载的反复作用<sup>[1]</sup>, 关于路面的分析方法与设计理论大多数都是以弹性理论和经验方法为基础。常规的弹性设计<sup>[2]</sup>既不能反映路面结构性态的本质和结构的实际安全程度, 也无法发挥材料塑性性能的潜力。安定理论为分析和研究复杂荷载作用下结构的响应提供了强有力的工具, 自 20 世纪 30 年代建立以来已得到了较为广泛的应用。Sharp 和 Booker<sup>[3]</sup>首先把安定理论引入路面结构设计中, 随后 Yu 和 Hossain<sup>[4]</sup>、Collins 和 Boulbibane<sup>[5]</sup>、Zhao 等<sup>[6]</sup>、Nguyen 等<sup>[7]</sup>学者相继发表了一些安定理论在路面结构中应用的研究成果, 为安定理论在道路领域的进一步推广发挥了重要作用, 目前国内还未见到安

定理论在路面工程具体应用的相关文献。

本文给出了一种基于下限定理的安定分析方法, 并将其应用于路面结构的安定分析中。

## 2 安定概念及理论

如果结构在变值载荷作用下, 在初始阶段产生塑性变形外, 以后不再产生塑性变形的状态叫做安定状态。对于承受变值荷载的工程结构, 除了保证载荷不到达塑性极限处, 还应保证结构处于安定状态。安定理论包括下限定理和上限定理, 下限定理认为: 如果能够找到任何一组不随时间变化的自平衡的残余应力场  $\rho_{ij}$ , 对于荷载在给定范围内的任何变化, 将它与在假设结构是完全弹性体条件下产生的应力场  $\sigma_{ij}^e$  相加后, 若处处不违背屈服条件, 即对屈服函数  $f(\cdot)$  有如下关系成立:

收稿日期: 2009-09-28

基金项目: 上海市重点学科建设项目资助 (No. B208); 海洋工程国家重点实验室自主研究课题资助 (No. GKZD010051)。

第一作者简介: 孙阳, 男, 1979 年生, 博士研究生, 主要从事材料强度与结构安定性方面的研究。

通讯作者: 沈水龙, 男, 1964 年生, 教授, 博导, 主要从事地基处理、地下工程方面的研究。E-mail: slshen@sjtu.edu.cn

$$f(\lambda \sigma_{ij}^e + \rho_{ij}) < 0 \quad (1)$$

则结构将安定<sup>[8]</sup>。该定理可以确定安定荷载的下限。

上限定理认为：如果能找到一个机动容许的塑性应变率循环  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ ，并且在给定的荷载范围内的某种加载路径上，有

$$\int_0^t \left\{ \int_V X_i \dot{u}_i + \int_{S_i} T_i \dot{u}_i dS \right\} > \int_0^t dt \int_V F(\dot{\varepsilon}_{ij}^p) dV \quad (2)$$

则结构不安定。式中： $X_i$ 为结构 $V$ 的体积力； $T_i$ 为表面 $S_i$ 上的面力； $\dot{u}_i$ 为对应于 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ 的速度场； $F(\dot{\varepsilon}_{ij}^p)$ 为塑性耗散能函数<sup>[9]</sup>。该定理可以确定安定荷载的上限。

### 3 计算模型

假定路面结构为2层，把作用在路面上车辆荷载简化为一滚动的圆柱作用。由于沿着圆柱滚动方向的路面结构可看作是无限长，且在 $-\infty < x < +\infty$ 内的各点有相同的加载历史，可简化为图1所示半空间二维平面应变问题<sup>[3]</sup>。计算模型尺寸为 $20a \times 40a$ ，有限元模型采用4节点平面单元划分，共4 000个单元，4 131个节点。

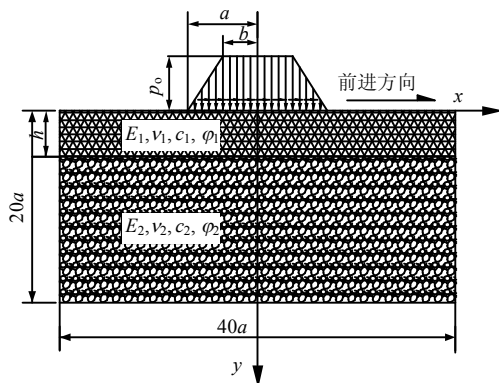


图1 路面简化计算模型

Fig.1 Simplified computation model of pavement

圆柱对路面的作用可以采用多种荷载形式，本文采用了更符合实际车辆轮胎荷载作用的梯形当量荷载<sup>[6]</sup>，即把圆柱的作用荷载简化为一垂直于地面的梯形分布荷载 $p_v$ 和一平行于地面的切向梯形分布荷载 $p_h$ 。梯形垂直分布荷载的最大值为 $p_0$ ，假定 $p_h$ 和 $p_v$ 成比例关系，随着路面摩擦系数 $\mu = p_h / p_v$ 变化。梯形荷载上边长为 $2b$ ，下底长 $2a$ 。路面结构假定为2层，第1层厚度为 $h$ ，材料参数 $E_1$ 、 $\nu_1$ 、 $c_1$ 、 $\phi_1$ 分别为第1层路面的弹性模量、泊松比、黏聚力、内摩擦角；第2层厚度为 $20a - h$ ，材料参数为 $E_2$ 、 $\nu_2$ 、 $c_2$ 、 $\phi_2$ 分别为第2层路面的弹性模量、泊松比、黏聚力、内摩擦角。

## 4 安定分析方法

### 4.1 屈服准则

常用的 Mohr-Coulomb 准则在 $\pi$ 平面上的屈服轨迹为6角形，它的主应力空间的屈服面存在尖顶和棱角，给数值计算带来困难，容易导致数值计算不收敛。若 $\pi$ 平面上的屈服轨迹为圆形，则在程序的编制上更容易实现，而且不存在尖顶处的数值计算问题，计算效率很高。本文采用了徐干成和郑颖人<sup>[10]</sup>提出的 Mohr-Coulomb 等面积圆屈服准则代替传统的 Mohr-Coulomb 准则，该准则要求 $\pi$ 平面上的 Mohr-Coulomb 不等边六角形面积与其所表示的圆面积相等，对平面应变情况有

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (3)$$

式中： $I_1$ 、 $J_2$ 分别为包含 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_{xy}$ 的应力张量第一不变量和应力偏张量的第二不变量； $\alpha$ 、 $k$ 为与岩土材料内摩擦角 $\phi$ 和黏聚力 $c$ 有关的常数，Mohr-Coulomb 等面积圆屈服准则时，式(3)中 $\alpha$ 、 $k$ 分别为

$$\alpha = \frac{2\sqrt{3} \sin \phi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9 - \sin^2 \phi)}}; k = \frac{6\sqrt{3}c \cos \phi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9 - \sin^2 \phi)}} \quad (4)$$

### 4.2 分析方法

本文基于式(1)下限安定定理，用式(5)作为安定判别准则：

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} + \sigma_{ij}^e; f(\rho_{ij}) \leq 0; f(\lambda_i \sigma_{ij}^e + \rho_{ij}) \leq 0 \quad (5)$$

式中： $\rho_{ij}$ 为某一加载增量步下的残余应力场； $\sigma_{ij}^e$ 为此加载增量步对应的纯弹应力场； $\lambda$ 为荷载乘子，满足式(5)的最大 $\lambda$ 值，即为所要求的安定极限乘子 $\lambda_s$ 。

采用增量加载弹塑性分析方法，每一荷载增量步用来求解残余应力场的加载模式如图2所示，具体分析步骤如下：

①对结构进行单调加载的弹塑性分析，求出弹性极限 $p_{oe}$ ，塑性极限 $p_{op}$ ，安定极限 $p_{os} = \lambda_s p_0 \in [p_{oe}, p_{op}]$ 。

②进行增量加载弹塑性分析，取 $p_{o1} = (p_{oe} + p_{op})/2$ ，进行第一增量步加载， $p_{o1}$ 作用在结构上进行若干循环加载，形成稳定残余应力场。

③用式(5)中第1式判别步骤②得到的残余应力场是否屈服，若屈服，进入步骤⑤；若不屈服，再对 $p_{o1}$ 作用下的结构进行单调加载纯弹性分析，得到一纯弹性应力场，把此应力场与步骤②中得到的残余应力场叠加。

④对步骤③中在用式(5)中第1式判断不屈服情

况下,再用式(5)中的第 2 式判别叠加后的应力场是否屈服,若屈服进入步骤⑤;若不屈服,进入步骤⑥。

⑤在  $p_{oe}$  和  $p_{oi}$  之间用二分法加载到一残余应力场不发生屈服的  $p_{oi}$  时如图 2 所示。同样,在  $p_{oi}$  作用下进行若干循环加载,把在  $t_{oi}$  处得到的稳定残余应力场与在  $t_{oi}$  作用下得到的纯弹性应力场叠加。用式(5)中的第 2 式判别应力场是否屈服,若屈服,前一加载值  $p_{o(i-1)}$  即为安定极限值  $p_{os}$ ; 若不屈服,用二分法继续下一增量步  $p_{o(i+1)}$  加载,直到取得能同时满足式(5)中的第 2、3 式判定条件的最大值  $p_{o\max}$ 。

⑥在  $p_{oi}$  和  $p_{op}$  之间用二分法直到取得能同时满足式(5)中的第 2、3 式判定条件的最大值  $p_{o\max}$ , 其中某一加载步  $p_{oi}$  到  $p_{o(i+1)}$  的实施同步骤⑤。

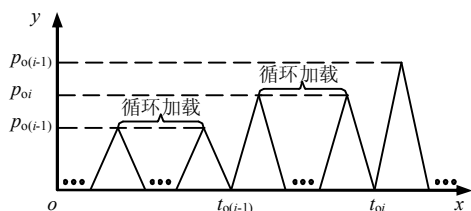


图 2 求残余应力场的加载模式  
Fig.2 Loading path for residual stress field

图 2 中,经过若干循环加载形成稳定残余应力场后,有  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$ , 即所有残余应力场的变化率  $\dot{\rho}_{ij} = 0$ , 残余应力场不随时间变化。同时,卸载后得到的稳定残余应力场  $\rho_{ij}$  满足下式:

$$\rho_{ij,j} = 0; \rho_{ij} n_j = 0 \quad (6)$$

式(6)中 2 个等式表示稳定残余应力场  $\rho_{ij} = 0$  外载作用下满足自平衡条件,因此步骤①~⑥求得的稳定残余应力场  $\rho_{ij}$  是不随时间变化的自平衡残余应力场。另外,由于满足式(5)中第 2、3 式,即处处不违背屈服条件,  $\rho_{ij}$  就是静力安定定理所要求的残余应力场。用图 2 加载方式最后所求得的  $p_{o\max}$  即为安定极限值  $p_{os}$ , 其对应的乘子就是安定极限乘子  $\lambda_s$ 。

具体到图 1 中的计算模型,实际情况下  $p_H$  和  $p_V$  在图 3 的二维荷载空间安定包络线是任意、互

相独立变化的,其加载路径可能为图 3 中的  $L_1$ 。文献[11]中的 2 个定理可以证明,不超出安定包络线的所有加载路径都将是安定的。另外,由于安定分析与最不利加载值出现的时间无关,且物体受简单加载系统作用时,若载荷加大到安定极限载荷,则其卸载后,物体内部所形成的真实的残余应力场就是安定极限乘子所对应的最佳残余应力场<sup>[12]</sup>。因此,可以用前述步骤①~⑥方法所采取的加载路径  $L_2$  替代任意加载路径  $L_1$  进行安定分析,若任意加载路径  $L_1$  可取得安定极限乘子  $\lambda_s$ , 则加载路径  $L_2$  也必能趋向  $\lambda_s$ 。

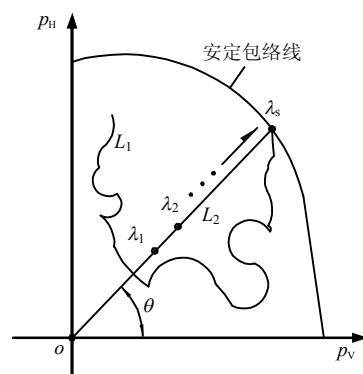


图 3 二维荷载空间加载示意  
Fig.3 Loading path for two-dimensional load space

为了把问题归结为求安定乘子极限值问题,加载路径  $L_2$  假定了  $p_H$  和  $p_V$  二者呈线性比例关系,即

$$\mu = p_H / p_V = \tan \theta \quad (7)$$

所求出的  $\lambda_s$  是二维空间安定包络线上的一个点,但当在  $\theta \in [0, 90^\circ]$  内取若干点时,则可求出图 3 中的安定包络线。

## 5 结果及分析

分别考虑了路面摩擦系数、路面厚度、路面作用荷载分布,以及内摩擦角变化对路面进行了安定极限分析,并计算了相应工况单调荷载作用下的弹性极限和塑性极限。

4 种工况计算参数见表 1, 其中,  $h/a$  比值为第 1 层厚度的变化;  $b/a$  比值反映路面作用荷载的分布形式,计算结果如图 4~7 所示。

表 1 4 种工况的计算参数  
Table 1 Calculation parameters of the four conditions

|      | $\varphi_1 / (^\circ)$ | $\varphi_2 / (^\circ)$ | $\nu_1$ | $\nu_2$ | $c_1 / c_2$ | $E_1 / E_2$ | $h/a$ | $b/a$ | $\mu$ |
|------|------------------------|------------------------|---------|---------|-------------|-------------|-------|-------|-------|
| 工况 1 | 40                     | 0                      | 0.3     | 0.4     | 5           | 5           | 1     | 0.5   | 取不同值  |
| 工况 2 | 30                     | 0                      | 0.3     | 0.3     | 5           | 5           | 取不同值  | 0.5   | 0.4   |
| 工况 3 | 30                     | 0                      | 0.3     | 0.3     | 5           | 5           | 1     | 取不同值  | 0.4   |
| 工况 4 | 取不同值                   | 0                      | 0.3     | 0.3     | 5           | 5           | 1     | 0.5   | 0.4   |

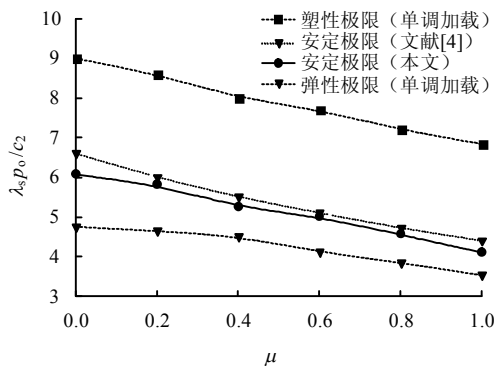


图4 路面摩擦系数对安定极限的影响

Fig.4 Influence of surface friction on shakedown limit

工况 1: 摩擦系数  $\mu$  变化对安定极限的影响。

由图 4 可见, 随着  $\mu$  值的增大, 路面的弹性极限、安定极限、塑性极限逐渐减小, 路面切向力的存在减小了路面的承载能力。本文结果与文献[4]的相关数据进行了对比, 数值结果较为接近, 本文方法的值略小于文献[4]方法所得到的值。

工况 2: 路面厚度  $h/a$  变化对安定极限的影响。

由图 5 可知, 路面的弹性极限、安定极限、塑性极限同表层厚度基本呈线性增大的关系, 在考虑经济性的前提下改变表层厚度可明显提高路面承载力。

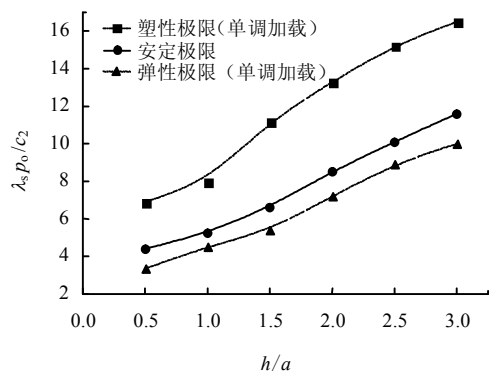


图5 路面表层厚度对安定极限的影响

Fig.5 Influence of layer thickness on shakedown limit

工况 3: 荷载分布  $b/a$  变化对安定极限的影响。

由图 6 可知, 梯形分布荷载集度的增加将引起路面的弹性极限、安定极限、塑性极限的减小, 文献[7]指出, 为了更符合实际情况,  $b/a$  不小于 0.9。为了保证足够的安全储备,  $b/a$  应取较大值。

工况 4: 内摩擦角  $\varphi_2$  变化对安定极限的影响。

由图 7 可知, 路面的弹性极限、安定极限、塑性极限均随内摩擦角增大而增大, 其中, 安定极限波动幅值较小, 内摩擦角变化引起的安定极限改变有限。

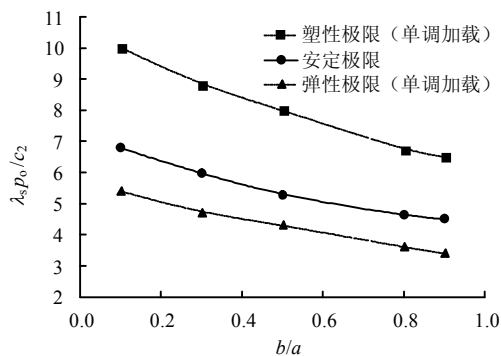


图6 路面荷载分布对安定极限的影响

Fig.6 Influence of trapezoidal on shakedown limit

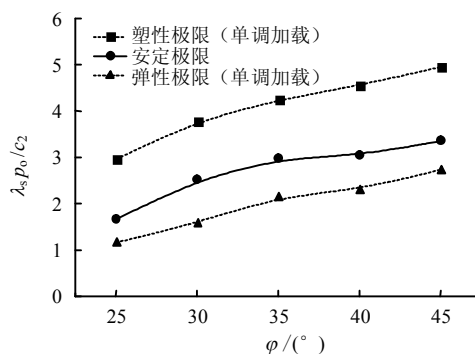


图7 内摩擦角对安定极限的影响

Fig.7 Influence of material friction angle on shakedown limit

## 6 结 论

(1) 本文给出了一种基于下限定理的安定分析方法, 并将其应用于路面结构的安定分析, 结果表明该方法对于评价路面结构的性状是切实可行的。

(2) 弹性设计方法低估了路面结构的承载能力, 同时, 路面的承载力也达不到塑性极限。复杂加载比简单加载情形更为不利, 安定极限是介于塑性极限和弹性极限之间的可以考虑复杂加载的合理承载力设计参数。安定极限可在保证安全性的前提下, 最大限度地发挥材料的潜能。

(3) 路面摩擦系数、路面厚度、路面荷载分布、内摩擦角均对安定极限有一定影响, 其中路面表层厚度影响尤为显著, 通过调整这几个参数可以优化路面结构的设计。

## 参 考 文 献

- [1] 杨果岳, 张家生, 王珏, 等. 车辆速度与载重对路面结构影响的现场试验研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(11): 3099—3103.  
YANG Guo-yue, ZHANG Jia-sheng, WANG Huan, et al. Experimental research on dynamic response of road pavement under different loads and speeds of vehicles[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(11): 3099—3103.

- [2] 邹维列, 王钊, 彭远新. 长寿沥青路面结构的层厚设计与分析[J]. 岩土力学, 2009, 30(3): 93—99.  
ZOU Wei-lie, WANG Zhao, PENG Yuan-xin. Design and analysis of layer thickness of perpetual asphalt pavement structure[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(3): 93—99.
- [3] SHARP R W, BOOKER J R. Shakedown of pavements under moving surface loads[J]. **Journal of Transportation Engineering**, 1984, 110(1): 1—14.
- [4] YU H S, HOSSAIN M Z. Lower bound shakedown analysis of layered pavements using discontinuous stress fields[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1998, 167: 209—222.
- [5] COLLINS I F, BOULBIBANE M. Geomechanical analysis of unbound pavements based on shakedown theory[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2000, 1: (1): 50—59.
- [6] ZHAO J D, SLOAN S W, LYAMIN A V, et al. Bounds for shakedown of cohesive-frictional materials under moving surface loads[J]. **International Journal of Solids and Structures**. 2008, 45: 3290—3331.
- [7] NGUYEN A D, HACHEMI A, WEICHERT D. Application of the interior-point method to shakedown analysis of pavements[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. 2008, 75: 414—439.
- [8] MELAN E. Theorie statisch unbestimmter systeme aus ideal plastischem baustoff[J]. **Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften in Wien**, 1936, IIA: 145—195.
- [9] KOITER W T. A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures[C]//Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. [S. l.]: [s. n.], 1956: 24—34.
- [10] 徐干成, 郑颖人. 岩土工程中屈服准则应用的研究[J]. 岩土工程学报, 1990, 12(2): 93—99.  
XU Gan-cheng, ZHENG Ying-ren. Studies on yield criterion in geotechnical engineering[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1990, 12(2): 93—99.
- [11] BORKOWSKI A, KLEIBER M. On a numerical approach to shakedown analysis of structures[J]. **Computer Method in Applied Mechanics and Engineering**, 1980, 22: 101—119.
- [12] 张明焕, 杨海元. 结构安定分析方法研究[J]. 应用力学学报, 1994, 11(4): 83—90.  
ZHANG Ming-huan, YANG Hai-yuan. Studies on shakedown analysis method of structures[J]. **Chinese Journal of Applied Mechanics**, 1994, 11(4): 83—90.